المحاضرة ٢

تمرين 1 لتكن $M=\{\phi, a\}$ و $N=\{\phi, b, c, d, e\}$ مجموعتين مرتبتين جزئيا حسب المخطط التالي

أوجد الجداء المباشر لهما

$M \times N$ مرتبة (a, b)

الحل: $M \times N = \{(\phi,\phi), (\phi, b), (\phi, c), (\phi, d), (\phi, e), (a, \phi), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e)\}$

تمرين 2 لتكن لدينا $(S, \leq)$ مجموعة مرتبة كلياً أثبت أنها شبكة توزيعية

الحل بما أن $x \wedge y$ أصغر من x ومن y و $x \vee y$ أكبر من x ومن y لدينا الحالات التالية:

$$\begin{cases} x = x \wedge (y \vee z) \\ x = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{cases}$$ إذا كانت x أصغر من y أو z

فيكون

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \vee z)$ محققة

ومنه $(S, \leq)$ شبكة توزيعية

تمرين [3] أثبت أن مجموعة الأعداد $\mathbb{Z}^+$ تحت علاقة القسمة شبكة توزيعية

الحل
$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}^+$$

فيمكننا كتابة $\prod p_i^{e_i}$ (جداء لقوى الاعداد الأولية p_i وهذه الأعداد قواسم لكل من x, y, z

أي:
$$x = p_1^{a_1} q_2^{a_2} \text{——} p_n^{a_n}$$
$$y = p_1^{b_1} \cdot\cdot p_2^{b_2} \text{——} p_n^{b_n}$$
$$z = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \text{——} p_n^{c_n}$$

حيث: a_i, b_i, c_i اعداد صحيحة موجبة ونهايتها n —١: i

$$e_i(x \wedge y) = \min\{e_i(x), e_i(y)\}$$
$$e_i(x \vee y) = \max\{e_i(x), e_i(y)\}$$

$$e_i[x \wedge (y \vee z)] = e_i[(x \wedge y) \vee (x \wedge z)]$$

وهو عبارة عن المتوسط الحسابي للدالة $e_i(x), e_i(y), e_i(z)$

تمرين [4] ليكن عنصراً ما من N^* المجموعة الجزئية (المنتهية) $D(n)$ معرفة بالشكل بالشكل:

$$D(n) = \{x \in N^* \mid n \text{ يقسم } x\}$$

عندئذ يكون:
$$x \vee y = L.C.M.(x, y)$$
$$x \wedge y = g.c.d(x, y)$$

ولتكن لدينا الشبكات $(D(30))$ و $(D(20))$ و $D(6)$

هل تكون هذه الشبكات محققة

D(6)

6, 2, 3, 1

D(6) : هذه الشبكة هي شبكة متممة لأن لكل عنصر من D(6) له متمم فيها

D(20)

20, 4, 10, 2, 5, 1

D(20) = $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

شبكة ليست متممة لأن (2) و (6) ليس لها متممات
مثلاً $2 \wedge 10 = 2$ و $10 = 2 \vee 10$ يجب ان يكون اجتماعهم (1)
وتقاطعهم (0) حتى يكون 2 متمم لـ 10

D(30)

30, 15, 10, 6, 5, 3, 2, 0

D(30) : شبكة متممة حيث :
(1) هو (0) لـ D(30)
(30) هو (1) لـ D(30)

$x \wedge y = 1 \ , \ x \vee y = 30 \ ; \forall x, y \in D(30)$ أي

$y = \frac{30}{x}$

$6 = \frac{30}{5} \ , \ 1 = \frac{30}{30} \ , \ 3 = \frac{30}{10}$

$, \ 5 = \frac{30}{6} \ , \ 10 = \frac{30}{3}$

$15 = \frac{30}{2} \ , \ 30 = \frac{30}{1}$

تمرين 5 ليكن لدينا الشبكات
$(D(6), | , \vee, \wedge), (P\{a,b\}, \subseteq, \cup, \cap)$
اثبت انهما ايزومورفيان مع بعضهما
نرسم مخطط هاس للشبكتين
1- مخطط هاس للشبكتين متشابه
وبالتالي يوجد ايزومورفيزم شبكي
لشبكتين بينهما

{a,b}, {a}, {b}, ϕ

6, 2, 3, 1